Missä vaiheessa matemaattinen ymmärrys syntyy? Kohti empiirisesti pätevää matematiikan filosofiaa

Pantsar, Markus

University of Turku

2012

Pantsar , M 2012 , Missä vaiheessa matemaattinen ymmärrys syntyy? Kohti empiirisesti pätevää matematiikan filosofiaa . julkaisussa V Viljanen , H Siipi & M Sintonen (toim) , Ymmärrys . Vuosikerta. Reports from the Department of Philosophy Vol. 25 , Reports from the Department of Philosophy , Vuosikerta. 25 , University of Turku , Turku .

http://hdl.handle.net/10138/325190

acceptedVersion

MISSÄ VAIHEESSA MATEMAATTINEN YMMÄRRYS SYNTYY – KOHTI EMPIIRISESTI PÄTEVÄÄ MATEMATIIKANFILOSOFIAA

Markus Pantsar, Helsingin yliopisto

1. Johdanto

Eräs matematiikanfilosofian keskeisimpiä kysymyksiä on matemaattisen ja empiirisen yhdistäminen. Vaikka on yleistä ymmärtää matematiikka puhtaan apriorisena tieteenä, täytyy filosofien tunnustaa myös matemaattisten teorioiden käytännön sovellusten merkitys. Tämä matematiikan ja empirian suhde on ollut jo antiikin Kreikasta asti filosofeja kiinnostava kysymys, mutta vaikka matemaattisen tiedon empiiriset sovellukset ovat olleet vuosituhansien ajan moninaisia, on tutkimus toiseen suuntaan – empiirisen aineiston sovelluksista matematiikanfilosofian tutkimuksessa – pääasiassa 1800-luvulla herännyt ja vasta viime vuosisadan lopulla varteenotettavaksi kehittynyt ilmiö. Vähitellen perinteisen aprioristisen platonistisen matematiikanfilosofian rinnalle on syntynyt kuitenkin myös empiristisiä teorioita.

1800-luvun kuuluisin empiristinen matematiikanfilosofi oli John Stuart Mill (1843), jonka vaikutus jäi kuitenkin hyvin pieneksi, ei vähiten Gottlob Fregen (1884) murskaavan kritiikin seurauksena. 1900-luvulla empirismin uuden nousun mukana myös matematiikanfilosofiassa alettiin kuitenkin jälleen kyseenalaistaa kuvaa matematiikasta puhtaan abstraktina tieteenä. W.V.O. Quine (1951) tunnetusti pyrki horjuttamaan vakiintunutta tiedon jakoa a prioriin ja a posterioriin, ja siten asettamaan myös matematiikan uudelle paikalle osana yhtenäistä tieteellistä selitysmallia. Ehkä kuuluisimmassa platonismin kyseenalaistavassa artikkelissa Paul Benacerraf (1973) kysyi miten me täysin fyysisinä subjekteina voimme saada tietoa täysin abstrakteista matematiikan objekteista. Tämä matemaattisen tiedon (ainakin osittainen) sulauttaminen empiirisen tietoon sai huipennuksensa Philip Kitcherissä (1983), joka esitti ensimmäisen Millin jälkeisen varteenotettavan puhtaan empiristisen matematiikanfilosofisen teorian. Hänen mukaansa matematiikka tutkii ideaalisoita niistä operaatioista, joita teemme tavallisessa ympäristössämme. Kitcherin teoria on saanut paljon huomiota, ja sitä on myöhemmin pyritty täydentämään yksityiskohtaisemmaksi esimerkiksi George Lakoffin ja Rafael E. Núñezin (2000) toimesta.

Empiristinen matematiikanfilosofia on kuitenkin vain yksi osa matemaattista ja empiiristä koskevaa laajempaa kysymystä. Vaikka emme hyväksyisi matemaattisen tiedon olevan pohjimmiltaan empiiristä, jää meillä kuitenkin useita empiriaan liittyviä kiinnostavia kysymyksiä. Matemaattisten teorioiden käytännön sovellukset ovat luonnollisesti eräs tärkeä aihe, mutta viime aikoina on alkanut tulla myös uusia filosofisesti varteenotettavia empiirisiä suuntauksia. Esimerkiksi Paolo Mancosu (2008) on tutkinut matematiikan käytäntöjä filosofisesti ja esittänyt monia mielenkiintoisia tuloksia. Eva Wilhelmus (2007) sekä Benedikt Löwe ja Thomas Müller (2008) ovat pyrkineet ratkaisemaan matematiikanfilosofia kysymyksiä sosiologisin menetelmin. Lisäksi klassisen Jacques Hadamardin (1954) tutkimuksen jälkeen monet tutkijat ovat olleet kiinnostuneita matemaatikkojen subjektiivista kokemuksista työssään. Viimeisenä, useat psykologiset kokeet (esim. Wynn 1992) ovat antaneet mielenkiintoista empiiristä aineistoa matemaattisen ajattelun perusteista. Uskon, että kaikkien näiden tutkimussuuntausten noteeraaminen filosofiassa on tärkeää riippumatta siitä, mikä on meidän matematiikanfilosofinen lähtökohtamme. Vaikka empiristiset filosofiset teoriat toki antavat tähän kenties parhaan pohjan, on mahdollista ajatella myös, että saamamme empiirinen lisäinformaatio auttaa selkeyttämään myös ei-empiristisiä matematiikanfilosofia käsityksiä.

Tässä artikkelissa keskitynkin nimenomaan empiiriseen matematiikantutkimukseen empirististen matematiikanfilosofisten teorioiden sijaan. Empiirisistä tutkimuksista keskityn toistaiseksi parhaita tuloksia saavuttaneeseen tutkimussuuntaukseen: psykologisiin tutkimuksiin alkeellisesta matemaattisesta ajattelusta. Kehittyneen matemaattisen ajattelun tarkastelu on toki tärkeä tutkimusalue, mutta se on myös pahamaineisen vaikeaa ja epävarmaa selvittää. Matemaatikkojen subjektiivisten kokemusten kartoitus voi antaa meille viitteitä matemaattisen ymmärryksen luonteesta, mutta tätä on vaikeaa yhdistää filosofisiin kysymyksiin empiirisyydestä ja apriorisuudesta. Samoin matemaatikkojen sosiologinen tutkimus antaa tärkeitä näkökulmia matemaatikkojen ammatillisista ja filosofisista käsityksistä, mutta on kiistanalaista missä määrin tällaista aineistoa voidaan käyttää hyväksi filosofisissa teorioissa. Yleinen ajatus onkin, että matematiikka ei ole välttämättä tiiviisti sidottu matematiikanfilosofiaan: kaksi matemaatikkoa voi toimia ammatillisesti samoin, vaikka heidän filosofiset käsityksensä olisivat täysin päinvastaiset.

Psykologisilla tutkimuksilla on sen sijaan mahdollisuus pureutua niihin kaikkein alkeellisimpiin prosesseihin, jotka ovat vastuussa matemaattisen ajattelun kehittymisestä. Esittelen tässä artikkelissa muutamia matematiikanpsykologian tuloksia, joilla uskon olevan suoraa filosofista relevanssia. En väitä, että nykyinen empiiristen tutkimusten taso on millään tavalla riittävä sitomaan meidät tiettyihin filosofiin teorioihin. Mutta jo se, että meillä on varteenotettavaa empiiristä aineistoa, on merkittävää – potentiaalisesti jopa käänteentekevää. Esimerkiksi platonistiset teoriat intuitiosta ja puhtaasta ajattelusta matemaattisen tiedon perustana tuntuvat epistemologisesti tarpeettomilta, mikäli voimme tyydyttävästi selittää matemaattisen tiedon muodostumista empiirisesti. Tämä on yksi tapa, jolla empiirisellä matematiikantutkimuksella voi olla suoraa filosofista relevanssia. Toinen tapa liittyy konventioiden asemaan matematiikassa. Ludwig Wittgensteinin (1983) matematiikanfilosofiassa kaikki matematiikka on vain konventioita. Mutta mikäli empiria osoittaa johonkin naturalistiseen syyhyn (esimerkiksi aivojen rakenteessa), josta tietyt matemaattiset käsitteet seuraavat, on konventionalismi ongelmissa. Tietenkin nämä ovat toistaiseksi vain epävarmoja luonnoksia filosofisille argumenteille. Mutta joka tapauksessa olemme matematiikanfilosofiassa nyt uudessa tilanteessa: meillä *on* kiinnostavaa empiiristä aineistoa, joka on potentiaalisesti filosofisesti relevanttia.

2. Psykologiset tutkimukset

On ymmärrettävää, että matemaattiseen ymmärrykseen liittyvät kysymykset eivät selviä helposti psykologian keinoin. Suurin osa matemaattista ajattelua on toistaiseksi aivan liian monimutkaista mallintaa psykologiassa ja aivotutkimuksessa käytetyin metodein. Luonnollisesti matematiikanfilosofian ongelmat eivät ole juuri helpommin palautettavissa empiirisesti testattaviin kysymyksiin. Mutta tästä on myös selkeitä poikkeuksia. On tiettyjä matematiikanfilosofisia kysymyksiä, joiden vastaukset tarjoavat selkeän testattavan hypoteesin. Tällainen on esimerkiksi kysymys siitä, onko matematiikka pohjimmiltaan *kielellistä* toimintaa. Konventionalistisessa matematiikanfilosofiassa – kuuluisimpana esimerkkinä Wittgenstein – matematiikan ajatellaan olevan vain konventioita tiettyjen sääntöjen ja käsitteiden käytöstä. On vaikeaa ymmärtää, mitä nämä konventiot voisivat olla, jos ne eivät ole kielellisiä. En tässä tahdo ottaa tähän kysymykseen tarkempaa kantaa, mutta on luontevaa ajatella että jos saamme evidenssiä siitä, että kaikki matemaattinen ymmärrys ei ole kielellistä, olisi tämä samalla evidenssiä konventionalismia vastaan.

Toinen empiirisesti relevantti filosofinen kysymys on se, missä *vaiheessa* matemaattinen ymmärrys syntyy. Monet matematiikanfilosofiset teoriat pitävät matemaattista ajattelua ja siihen liittyviä intuitioita hyvin pitkälle kehittyneinä kykyinä. Uskon useimpien intuitionististen ja platonististen teorioiden olevan tämänkaltaisia, vaikka kysymys on hyvin monitahoinen ja siksi tahdon esittää tämän ajatuksen pääasiassa työhypoteesina. Mutta mikäli platonistit ovat oikeassa ja matemaattista intuitiota ei voida palauttaa yksinkertaisempiin psykologisiin prosesseihin, on syytä odottaa, ettei matemaattisen ajattelun alkeita löydy ennen tiettyjä kognitiivisia (ja kenties lisäksi kielellisiä) kykyjä saavuttaneilta lapsilta.

Nämä ovat vain kaksi esimerkkiä siitä, miten empiiriset ennusteet ja matematiikanfilosofiset teoriat liittyvät toisiinsa. Kenties nämä yhteydet voidaan selittää filosofisesti sellaisillakin tavoilla, jotka romuttavat yhteyden empiriaan. Ehkä on olemassa parempia esimerkkejä matematiikanfilosofian empiirisestä ulottuvuudesta. Mutta lähtökohtaisesti tässä esitetyt ongelmat näyttävät olevan luonteeltaan filosofisia ja sisältävän selkeän empiirisen yhteyden. Siksi matematiikanfilosofiassa on syytä ottaa erittäin vakavasti tällaiset yhteydet, etenkin kun yllä esitetyt esimerkit ovat jo saaneet taustalleen merkittäviä empiirisiä tuloksia.

Esittelen tässä artikkelissa muutamia esimerkkejä filosofisesti relevanteista psykologisista tutkimuksista. Esimerkit käsittelevät matemaattisen ajattelun syntyvaihetta, matematiikan ja kielellisyyden yhteyttä, sekä ajattelun anomalioita, joita vauriot aivoissa ovat saaneet aikaan. Kaikki esimerkit käsittelevät hyvin yksinkertaista matematiikkaa. Ainakin yhden esimerkin kohdalla on jopa kyseenalaista, voidaanko ajatella kyseen olevan lainkaan matematiikasta. Psykologisten kokeiden ja matematiikanfilosofian yhteys vaatii vielä paljon tutkimusta sekä empiirisesti että filosofisesti. Mutta kaikilla tässä esitellyillä tutkimuksilla on eräs hyvin tärkeä ominaisuus: ne ovat empiirisesti vahvoja ja usein toistettuja. Se mitä ne lopulta tarkoittavat psykologisesti – puhumattakaan filosofisesti – jää vielä avoimeksi, mutta niiden empiirinen relevanssi on hyvin vahva. Mikäli matematiikanfilosofiassa emme halua jämähtää kvasi-mystiseen käsitteistöön intuitioista ja apriorisuudesta, emme voi sulkea silmiämme tältä aineistolta.

Matematiikka on kiistatta kielellistä toimintaa, mutta onko se pelkästään – tai pohjimmiltaan – sitä? Monet matemaatikot (ks. Hadamard 1954) ovat kuvailleet ”näkevänsä” matemaattisia totuuksia ja kääntävänsä ne kielellisiksi. Tämä on kiinnostava aihe, mutta sen mallintaminen koejärjestelyillä on hankalaa. Siksi tässä, kuten monessa muussakin matematiikanpsykologian kysymyksessä, parempaa empiiristä aineistoa on tarjolla matemaattisen ajattelun primitiivisimmillä asteilla. Mitä voisimme odottaa primitiivisen ajattelun suhteen, mikäli matemaattinen ajattelu olisi puhtaasti kielellistä? Ensimmäinen luonteva hypoteesi on, että mitään matemaattiseen ajatteluun liittyvää ei voitaisi havaita tutkimuskohteilla, joilla ei ole kielellistä kyvykkyyttä, kuten pienillä lapsilla ja eläimillä. Toinen yhtä luonteva hypoteesi on, että kielellisesti kehittyneillä ihmisillä ei olisi löydettävissä oleellisia eroja matemaattisen ja kielellisen prosessoinnin välillä. On erittäin mielenkiintoista, että kumpikaan näistä hypoteeseista ei kuitenkaan saa tukea empiirisestä tutkimuksesta.

Modernin matematiikanpsykologian yksi tärkeimmistä hahmoista on Karen Wynn, jonka useat nerokkaat koejärjestelyt 1990-luvun alussa haastoivat vanhoja käsityksiä matemaattisen ajattelun syntyvaiheista. Eräässä kokeessa (Wynn 1992) 4-5 kuukauden ikäisille lapsille näytettiin nukkeja ja mitattiin aikaa, jonka lapsi katsoi niitä. Tämä *habituaatioon* perustuva mittaaminen on yleinen tapa tutkia pienten lasten reaktioita: lapset katsovat pitempään, kun he näkevät jotakin uutta ja mielenkiintoista. Wynnin kokeessa lapsi näki nuken, jonka eteen vedettiin suoja. Tämän jälkeen lapsi näki, että käsi laittaa toisen nuken suojan taakse. Nyt Wynn halusi selvittää, odottavatko lapset näkevänsä kaksi nukkea, kun suoja poistetaan kokeen lopuksi? Koe (joka on toistettu useaan otteeseen myöhemmin) paljasti, että näin todellakin tapahtuu. Jos suojan takaa poistettiin nukke lapsen huomaamatta – ja lapsi näki siis vain yhden nuken – hän jäi katsomaan nukkea pitempään kuin siinä tapauksessa, että suojan takaa paljastui lapsen odottamat kaksi nukkea. Koe toistettiin myös niin päin, että lapsi näki kaksi nukkea joiden eteen vedettiin suoja. Tämän jälkeen lapsi näki käden poistavan yhden nuken, ja osassa kokeista lapsen huomaamatta lisättiin toinen nukke takaisin. Jälleen tulos oli sama: lapsi jäi katsomaan pitempään tilannetta, joka oli aritmeettisesti mahdoton.

Tony Simonin (Simon et al 1995) johtama tutkimusryhmä teki vielä yhden lisämuunnoksen toistaessaan Wynnin koetta: tällä kertaa nukkejen lukumäärän lisäksi nuket vaihdettiin toisen hahmoisiksi. Yllättäen tulos oli jälleen sama: 3-5 kk ikäiset lapset kiinnittivät suurimman huomion epäluonnolliseen nukkejen *lukumäärään*, vaikka nuket vaihtoivat välillä muotoa ja väriä. Myös lukuisat muut kokeet – joita on koottu Stanislas Dehaenen kirjaan *The Number Sense* (2011)[1] – viittaavat alkeellisiin aritmeettisiin kykyihin hyvin pienillä lapsilla. Lisäksi samanlaista tutkimusta on tehty eläimillä. Wynnin koe on toistettu apinoilla (Hauser et al 1996), ja lisäksi monet muut koejärjestelyt (sekä eläinten havainnointi luonnossa) antavat erittäin vahvaa todistusaineistoa siitä, että eläimillä apinoista lintuihin on kyky käyttää alkeellista aritmetiikkaa.[2] Lasten vastaavat *kielelliset* kyvyt kehittyvät kuitenkin vasta paljon myöhemmin ja tietenkään useimmilla eläimillä ei ole lainkaan kielellisiä välineitä edes yksinkertaiseen aritmetiikkaan.

Edellä esitetyt koetulokset antavat meille vahvan syyn uskoa, että yksinkertainen matematiikka ei voi olla täysin kielellistä. Mutta *teemmekö* me kehittyessämme matematiikasta kielellistä? Vaikka osittain näin varmasti onkin, eräät kokeet viittaisivat siihen, ettemme koskaan hävitä sitä ”suoraa” yhteyttä lukuihin, joka on havaittavissa pienillä lapsilla ja eläimillä. Eräässä yksinkertaisessa kokeessa Butterworth

[1] Dehaenen kirjan alkuperäinen version (1997) oli hyvin tärkeä katsaus 90-luvun alun empiirisiin tutkimuksiin ja tässä laajennetussa toisessa painoksessa Dehaene päivittää tilanteen ajan tasalle. On huomattavaa, miten vahvasti aiemman painoksen tutkimussuuntaukset ovat saaneet tukea myöhemmistä kokeista. Siksi tässä artikkelissa esitetyt lähinnä 90-luvulta peräisin olevat tutkimukset ovat vieläkin ajankohtaisia.

[2] Ks. Butterworth 1999, 126-147.

(1999, 238) näytti koehenkilöille – tällä kertaa sisältäen aikuisia – numeropareja ja esitti helpon kysymyksen: ovatko numerot samoja? Tähän vastatakseen koehenkilön ei tietenkään tarvitse ymmärtää mitään numeroista; riittää, että hän osaa erottaa kaksi symbolia toisistaan. Voisi siis olettaa, että koehenkilöiden vastausaika olisi sama numeropareilla ”4 3” ja ”4 7”. Näin ei kuitenkaan ollut, vaan koehenkilöt (joista nuorimmat olivat kuusivuotiaita) olivat nopeampia vastaamaan, kun (lukumäärän) ero numeroiden välillä oli suurempi. Useat muut kokeet (Butterworth 1999, 227-245) antavat saman tuloksen: ihmiset eivät voi mitään sille, että he alkavat ajatella numerosymboleja lukumäärinä. Selvästikin ajattelemme jollain tasolla matemaattisesti tiedostamattamme.

Psykologiassa Wynnin ja muiden kokeet ovat saaneet vahvan tuen lisäksi myös kritiikkiä. Esimerkiksi Kelly Mix (2002) kritisoi Wynnin johtopäätöstä pikkulasten aritmetiikasta:

> Aivan kuten eläintutkijoilla on riski inhimillistää ei-inhimilliset subjektinsa, pienten lasten tutkijoilla on riski peittää perushavaintoprosessit aikuisten ajattelulla. Pitemmän katseluajat on yleisesti tulkittu evidenssiksi siitä, että lapset ovat muodostaneet abstraktin representaation, verranneet sitä koeärsykkeeseen ja käytännössä sanoneet itselleen: ”Hei, tuo on erilainen” tai ”Kuinka yllättävää!”

En mene tässä syvemmälle psykologian piiriin, mutta Mixin vasta-argumentti on syytä huomioida sillä se on myös filosofisesti relevantti. Arvostellessaan Wynnin kokeita Mix tuntuu olettavan, että niissä lapsille postuloidaan kognitiivisia kykyjä, joita heillä ei ole. Mutta tämä ei ole Wynnin teoria, vaan se *kysymys* johon hän pyrkii vastaamaan. Jos Mix olettaa kaiken aritmeettisen osaamisen olevan kognitiivisesti kehittynyttä, tietenkin tuntuu kyseenalaiselta postuloida sitä pienille lapsille tai eläimille. Mutta Wynnin kokeiden kaltaisten tulosten viesti on juuri päinvastainen: yksinkertaiset aritmeettiset taidot eivät vaadi kehittyneitä kognitiivisia kykyjä, vaan on syytä uskoa, että ne ovat jollain yksinkertaisemmalla tavalla rakennettuna aivoihin.

Uskon, että yllä esitetyn kaltaiset kokeet ovat tärkeää ottaa huomioon myös matematiikanfilosofiassa. Tietenkään pienten lasten ja eläinten kyky hallita pieniä lukumääriä tai yksinkertaista aritmetiikkaa ei ole matematiikkaa siinä mielessä kuin se yleensä ymmärretään. Varsinainen matemaattinen ajattelu vaatii keinoja *yleistää* ja tämä vaatii kielellistä kehitystä. Opittuamme riittävästi kieltä voimme ilmaista sellaisia asioita kuin että millään kokonaisluvulla n ei päde $n - 1 = n$. Pienten lasten ja eläinten matematiikassa tämä havainto ei kuitenkaan pidä paikkaansa, sillä niiden kyky yksinkertaiseen aritmetiikkaan rajoittuu pieniin lukumääriin. Meidän onkin syytä olla tarkkana, ettemme vedä liian pitkälle meneviä johtopäätöksiä psykologisista kokeista. Voi hyvinkin olla, että suuri osa matematiikasta on oleellisesti kielellistä toimintaa ja jokin kevyempi muoto konventionalismista voi selittää tämän filosofisesti. Mutta mikäli voimme löytää alkeellista aritmetiikkaa subjekteilla, joilla ei ole riittävää kielellistä kykyä, on väite siitä että *kaikki* matematiikka on puhtaasti kielellistä vaikea hyväksyä. Siksi tässä esitetyt koetulokset ovat vakava haaste Wittgensteinin kaltaisille konventionalisteille. Mikäli luonnollisten lukujen yhteenlasku on pelkästään konventio, näyttäisimme jakavan jollain tasolla tämän konvention kolmen kuukauden ikäisten lasten ja korppien kanssa – jolloin koko konvention käsite on jo venytetty absurdeihin mittoihin.

Toisen matematiikanpsykologiassa kiinnostavien tulosten joukon muodostavat erilaiset anomaliat, joita esimerkiksi vauriot aivoissa ovat saaneet aikaan. Butterworth (1999) mainitsee tästä useita tapauksia. Ihminen, jolla on normaali kielellinen kyvykkyys, voi olla täysin hukassa numeroiden kanssa. Eräässä Butterworthin esimerkissä (s. 180) mies menetti aivoverenvuodon saatuaan kyvyn lukea numeroita, mutta *numeraaleja* hän pystyi lukemaan täysin vaivatta. Mies siis pystyi käsittelemään lukuja niiden esiintyessä sanoina numeroiden sijaan. Muissa esimerkeissä mainitaan tapauksia, joissa kielellisesti normaali ihminen on menettänyt kokonaan kyvyn tehdä yksinkertaisiakin päässälaskuja. Yhteistä tällaisissa tapauksissa ovat olleet vauriot vasemmassa parietaalisessa (päälaen) lohkossa. Nykyaivotutkimuksen mukaan käsitteemme numeroista ja niiden relaatioista sijoittuukin juuri tähän lohkoon, samoin kuin osa avaruudellisesta hahmotuskyvystä.[3] Kielellinen toiminta sen sijaan tapahtuu otsalohkossa.

Tässä kuvailemani matematiikanpsykologiset tutkimukset ovat peräisin 1990-luvulta ja sen jälkeen alalla on luonnollisesti tapahtunut uutta kehitystä.[4] Eräs kiinnostava kysymys on se, mikä on luontainen tapamme ymmärtää lukumääriä. Stanislas Dehaenen tutkimusryhmän kokeessa (Dehaene et al 2008) tutkittiin eroja länsimaisen ja Amazonin alkuperäiskansojen lukukäsityksissä. Heidän tuloksensa tukivat käsitystä siitä, että lukujen käyttö on synnynnäinen ominaisuus, mutta he huomasivat suuria eroja siinä, miten eri kulttuureissa lukujen suhteet ymmärretään. Siinä missä länsimaissa luvut on tapana sijoittaa viivalle lineaarisesti (kuten lukusuoralla opetetaan tekemään), Amazonin kansat tekevät saman *logaritmisesti*. Dehaenen ryhmän hypoteesi onkin, että juuri tämä (ainakin kvasi-) logaritminen lukukäsitys on synnynnäinen. Tätä tukevat myös kokeet (ks. Dehaene 2011), joissa on tutkittu pienten lasten ja eläinten lukukäsityksiä. Tutkimuskohteet ovat näissä kokeissa erottaneet pienet luvut hyvin toisistaan, mutta lähestyttäessä suurempia lukuja (joiden ei tarvitse olla viittä isompia, riippuen subjektista) tämä kyky erottaa lukumääriä heikkenee nopeasti. Pieni lapsi tai eläin erottaa kaksi kiveä kolmesta kivestä, ja kymmenen kahdestakymmenestä, muttei kymmentä yhdestätoista. Suositussa metaforassa synnynnäistä lukukäsitystämme voi verrata siihen, että ämpäriin pistetään kauhalla vettä. Ensimmäisten

[3] Ks. Blakemore & Frith (2005).

[4] Dehaene (2011) esittelee runsaasti uudempaa tutkimusaineistoa. Lisäksi esim. De Cruz et al (2010) sisältää uutta empiiristä tutkimustietoa aritmetiikan perusteista.

kauhallisten järkeen erot ovat selkeitä, mutta ämpärin täyttyessä käy erojen huomaaminen koko ajan vaikeammaksi.

Miten tämä logaritminen – jos se todellakin on meidän synnynnäinen tapa ymmärtää lukumääriä – on sitten kehittynyt niiksi eksakteiksi ideoiksi, joita käytämme matematiikassa? Tämä on paljon lisätutkimusta vaativa kysymys, johon ei toistaiseksi voi esittää selkeitä vastauksia. Mutta oletettavasti kulttuurillinen kehitys on tässä tärkeässä asemassa. Pienillä lukumäärillä esiintyvä idea siitä, että kolme on kahden ja kaksi yhden *seuraaja*, on koko aritmetiikkamme ytimessä. Mutta tätä käsitettä eivät kaikki kansat ole pystyneet jalostamaan synnynnäisistä aritmeettisista kyvyistämme. Se, miksi näin on tapahtunut, on erittäin kiinnostava kysymys, jossa siirrymme vähitellen psykologiasta matematiikan historian ja filosofian puolelle.

3. Matemaattinen ymmärrys

Edellä esitetyn perusteella tuntuu selvältä, että matematiikanfilosofian pitää siirtyä nykyaikaan ottamalla empiirinen tutkimus vakavasti. Tämä ei tarkoita sitä, että meidän on joko kannatettava kritiikittä esimerkiksi Kitcherin empirismiä tai hylättävä perinteiset metodit tehdä matematiikanfilosofiaa. Vaikka ajateltaisiin kaiken matematiikan pohjautuvan aritmetiikkaan ja geometriaan – ja näiden olevan pohjimmiltaan empiiristä – on tärkeää ymmärtää myös matemaattisen tutkimuksen ja tiedon erityisluonne. Kuva matematiikasta puhtaana *a priori* –tieteenä näyttäisi olevan vanhentunut, kun tarkastelemme ensimmäisiä matemaattisia käsitteitämme: lukumääriä ja muotoja. Mutta yhtä virheelliseltä tuntuu ajatella, että esimerkiksi moderni algebra on jollakin oleellisella tavalla empiiristä. Matematiikka on niin äärimmäisen laaja, monipuolinen ja jatkuvasti kasvava tiede, että sen luonteen filosofinen kuvaaminen on aina vaarassa olla yksinkertaistava. Välttääksemme tämän on empiirinen kehittyneen matematiikan tutkimus välttämätöntä ja Mancosun kaltaisten filosofien työ hyvin tärkeää. Selittääksemme matemaattisen ymmärryksen luonteen meidän täytyy tietää, mitä matemaatikot tekevät.

Mutta ammattimatemaatikkojen tutkimus on vain pieni osa siitä matematiikasta, jota ihmiset päivittäin käyttävät. Siksi perinteisesti paljon tutkitut matematiikanfilosofian alat kuten aritmetiikan, joukko-opin, logiikan, geometrian ja todennäköisyyslaskennan filosofiat ovat yhtä tärkeitä kuin ennenkin. Penelope Maddyn (1997, 2007) kaltaiset naturalistit uskovat matematiikanfilosofian ongelmien aukeavan parhaiten matematiikan avulla. Vaikka tämä on ymmärrettävä ja monessa yhteydessä kannatettava ajatus, jättää se silti suuren osan matematiikanfilosofian kysymyksistä ilman vastausta. Matemaattinen käytäntö ei anna meille vastausta esimerkiksi kysymykseen luonnollisten lukujen olemuksesta: logiikkaan, joukko-oppiin ja suoraan aksiomatisointiin perustuvat lähestymistavat ovat kaikki käytössä. Kuitenkin kysymys siitä, mistä luonnolliset luvut tulevat, on erittäin relevantti matemaattisen ymmärryksen kannalta. Matematiikanfilosofialla onkin paikkansa sekä pitkälle kehittyneessä ammattimatematiikassa että yksinkertaisessa arkimatematiikassa.

Nämä matemaattisen tiedon kaksi hyvin eri astetta tarvitsevat kuitenkin erilaiset tutkimusmetodit. Siinä missä pitkälle kehittyneellä matematiikan erikoisalalla voi olla ainoastaan satoja, kenties vain muutamia, asiantuntijoita koko maailmassa, käyttävät luonnollisten lukujen yhteenlaskua käytännössä kaikki ihmiset. Myös käsitteiden kompleksisuudessa on valtava ero: on hyvin vaikea suunnitella empiiristä koetta, joka voisi selvittää mistä kehittyneet matemaattiset käsitteet tulevat. Erikoistuneen matemaatikon ajattelu on alallaan niin kehittynyttä, että meillä ei ole tällä hetkellä mitään toivoa tuntea psykologisia prosesseja sen taustalla. Sitä vastoin luonnollisten lukujen olemuksesta voimme saada tietoa tutkimalla vastasyntyneitä lapsia ja eläimiä, jolloin meillä ei ole mitään riskiä siitä, että tulokset olisivat käsitteellisen ajattelun tahraamia.

Kaikessa tässä on tärkeää löytää oikea alue ja relevanssi empiiriselle tutkimukselle matematiikanfilosofiassa. Väitän että tällä hetkellä empiirinen tutkimus on eniten relevanttia, kun tarkastelemme perimmäisten käsitteiden kuten lukumäärän kehittymistä ihmisillä. On helppo ajatella, että matemaattinen ajattelu olisi kehittynyt ilman, että olisimme koskaan keksineet esimerkiksi aksiomaattisen systeemin ideaa. Edes formaalit kielet eivät ole välttämättömiä saavuttaaksemme tietyn matemaattisen tason. Mutta miten olisimme voineet koskaan kehittyä matematiikassa ilman taipumusta havainnoida maailmaa lukumäärinä ja muotoina? Tämä on varmasti yleisesti hyväksytty näkemys, mikä tekee kummalliseksi sen, miten vähän filosofiassa on huomioitu niitä empiirisiä tuloksia, jotka *selvittävät* meille tätä taipumusta. Platonille oli kenties luontevaa ajatella yhteys ihmisajattelun ja abstraktien matemaattisten olioiden maailman välillä. Nykytieteen ja -filosofian valossa tämä yhteys on kuitenkin erittäin ongelmallinen. Mutta Platon ei tiennyt psykologiasta ja filosofiasta sitä, mitä me tiedämme; hän ei voinut esimerkiksi tuntea, että vastasyntyneellä lapsella on taipumus erottaa lukumääriä.

Toki matematiikan psykologia vaatii vielä paljon tutkimusta ennen kuin tällaiset tulokset ovat kiistattomia, ja lisäksi tutkimuksia tulisi laajentaa koskemaan esimerkiksi loogista ja geometrista ajattelua. Nykyisellään psykologinen tietämyksemme on hyvin vajavaista, mitä tulee yksinkertaisimpiinkin käsitteisiin. Mutta se on silti *jotakin*. Puhdas matematiikanfilosofia on kehittynyt hämmästyttävän vähän tällaisten perustavien kysymysten suhteen. Vielä 2000-luvulla on filosofeja, jotka ajattelevat matemaattisten objektien olevan itsenäisesti olemassa abstraktissa ideoiden maailmassa. Toisaalta on myös filosofeja, jotka ajattelevat matematiikan teorioiden olevan lopulta vain mielivaltaisia symbolien pelejä. Lienee selvää, että kysymys matemaattisesta ymmärryksestä on näille kahdelle filosofityypeille täysin yhteismitaton. Siksi matematiikanfilosofiassa meidän pitäisi olla erityisen kiinnostuneita siitä mahdollisuudesta, että voimme saada yhä luotettavampaa empiiristä tietoa matemaattisen ymmärryksen synnystä. Vaikka tutkimukset toistaiseksi ovatkin vajavaisia ja suppea-alaisia, meillä on empiirisiä syitä uskoa, että matemaattinen ymmärrys on ainakin jollain tavalla sisäänrakennettu aivoihimme. On hämmästyttävää, jos tätä ei pidetä filosofisesti relevanttina alalla, joka ei perinteisesti ole saanut nauttia minkäänlaisesta empiirisestä tuesta.

Kirjallisuus

Benacerraf, Paul (1973), "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy* Vol. LXX, 661-679.

Butterworth, Brian (1999), *What Counts: How Every Brain Is Hardwired for Math*, New York: Free Press.

Blakemore, S-J. & Frith, U. (2005), *The Learning Brain*, Blackwell, Oxford.

De Cruz, H.; Neth, H.; Schlimm, D. (2010), "The cognitive basis of arithmetic", in Löwe, B. & Müller, T. (Eds.): *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, College Publications, London (2010), 59-106.

Dehaene, Stanislas (1997), *The Number Sense*, Oxford University Press, New York.

Dehaene, Stanislas (2011), *The Number Sense – Revised and Expanded edition*, Oxford University Press, New York.

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E., Pica, P. (2008), "Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures", *Science* 320, 1217-1220.

Frege, Gottlob (1884), *The Foundations of Arithmetic*, 2nd ed., Blackwell 1974.

Hadamard, Jacques (1954), *The Psychology of Invention In The Mathematical Field*, Dover Publications, Mineola, NY.

Hauser, M., MacNeilage, P. & Ware, M. (1996), "Numerical representations in primates", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 93, 1514-1517.

Kitcher, Philip (1983), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York.

Lakoff, George & Núñez, Rafael E. (2000), *Where Mathematics Comes From*, Basic Books, New York.

Löwe, B. & Müller, T. (2008), "Mathematical Knowledge is Context Dependent", *Grazer Philosophische Studien* 76 (2008), 91-107.

Maddy, Penelope (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Maddy, Penelope (2007), *Second Philosophy: A Naturalistic Method*, Oxford: Oxford University Press.

Mancosu, Paolo (2008), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford.

Mill, John Stuart (1843), *A System of Logic*, reprinted in 2002, University Press of Pacific, Honolulu.

Mix, Kelly (2002), "Trying to build on shifting sand: commentary on Cohen and Marks", *Developmental Science* 5, 205-206.

Quine, W.V.O. (1951), "Two Dogmas of Empiricism", *Philosophical Review* 60/1, 20-43.

Simon, T.J., Hespos, S.J. & Rochat, P. (1995), "Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992), *Cognitive Development* 10, 253-269.

Wilhelmus, Eva (2007), "Formalizability and Knowledge Ascriptions in Mathematical Practice, *ILLC Publications* PP-2007-24.

Wittgenstein, Ludwig 1983: *Remarks on The Foundation of mathematics (Revised Edition)*, Cambridge, MA: MIT Press.

Wynn, Karen (1992): "Addition and subtraction by human infants", *Nature* 358, 749-751.